814. Mannigfaltigkeit ヘノ連續変換

小 松　醇 郎（阪大）

Sphäre ヘノ連続変換ハ Sphäre ノ特殊ノ性質ノ故ニ 0-Zyklus ヲ使ッテ奇麗ニ取リ扱フコトが出来ル、此ノ取扱ヒニハ如何ナル性質が本質的ニ必要デアラウカ、コレヲ Mannigfaltigkeit ニ就イテ調ベルコトニスル。

(1) Definierender Zyklus, haht Zyklus.

Mannigfaltigkeit M^n ハ definierender Zyklus Z^{n-1} ニヨリ一意ニ定メラル。ソノ Z^{n-1} ハ S^{n-1} ノ点ヲ適當ニ互ヒニ Identifizieren シテ生ズルモノデアル. n 次元 Vollkugel V^n ヲトリソノ Rand S^{n-1} ヲ今ノ如ク Identifizieren シテ Z^{n-1} ヲ作ル. 斯クスル事ニ依ッテ凡ベテノ M^n ハ生ズル。

（証明略）

一ツノ M^n ニ對シ如何ナル Z^{n-1} が起リ得ルカ。

M^n ヲ作ルタメニ, S^{n-1} ノ Identifizierung ハ如何ナル條件ヲ必要トスルカ。

等ノ問題が生ズル。

M^n ハ Vollkugel V^n ノ Rand ノ Identifizierung ニヨリ生ズル. 從ッテ $K^{n-1} \longrightarrow M^n$ ヘ連続変換サレタトキ, ソレト等シイ Abbildungsklasse ノ中ニ $K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ ナル連続変換が存在スル. 然ラ

バ

$K^n \supset K^{n-1}$, $f: K^{n-1} \to Z^{n-1}$ 與ヘラレタトキ f ガ K^n マデ M^n ニ關シ erweitern 出来ルタメノ必要且ト分ナ條件ハ何カトイフ問題モ生ズル。

(II) $f: K^n \to M^n$ (orientierbar) ガ與ヘラレ且ツ $f(K^{n-1}) \subset Z^{n-1}$ トスル。然ラバ各n次元單体 T_i^n ニ對シ

$f(\dot{T}_i^{n-1}) \subset Z^{n-1}$, $f(T_i^n) \subset M^n$, ヨリ mod $\dot{T}_i$ ニ關シ Abbildungsgrad m_i ガ一意ニ定マル[1]。

對應 $f^n: T_i^n \to m_i$

ハ 0-Zyklus デアル。

<u>定理</u>. 連続変換 $f: K^n \to M^n$ ガ wesentlich auf デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ 0-Zyklus $f^n \neq 0$ ナルコトデアル。

証明 i) f ガ wesentlich auf デナイナラバ $f^n \sim 0$ デアル. f ト等シイ Klasse ニアル Abbildung f' デ K^n ハ Z^{n-1} ニ移ル。然ラバ各n次元單体 T_i^n ニ對シ topologisches Produkt $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ノ M^n ヘノ連続変換 φ ガ存在シ

$$\varphi(T_i^n \times 0) = f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n \times 1) \subset Z^{n-1}$$

---

1) grad ガ同一デモ $T^n \to M^n$ ノ Abbildung ハ mod $\dot{T}^n$ デ一意トハ限ラナイ. 是ガ Sphäre ト異ル所デアル。

$$\varphi(T_j^{n-2}\times\langle 0,1\rangle)\subset Z^{n-1}$$

ヲ充ス．故ニ $T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle$ ニ對シ φ ニヨリ M^n ヘノ grad n_k ガ定マル．シカラバ $\varphi(T_i^n\times\langle 0,1\rangle)\subset M^n$ ニヨリ $T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ ノ境界即チ

$$T_i^n\times 0+\sum_k T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle+T_i^n\times 1$$ [2)]

ハ φ ニヨリ Abbildungsgrad 0.

故ニ　$m_i+\sum n_k=0$

今 $(n-1)$ 次元代数複体 $f^{n-1}: T_k^{n-1}\rightarrow -n_k$ ヲトレバ

$$f^n=g_0 f^{n-1}$$

ii) $f^n\sim 0$ ナラバ f ハ wesentlich auf デ無イ。

各 T_i^n ニ對シ $T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ ノ連続変換 φ ガ次ノ如ク作レレバ良イ。

$$\varphi(T_i^n\times 0)=f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n\times 1)\subset Z^{n-1}$$

先ヅ $T_k^{n-1}<T_i^n$ ニ對シ $\varphi(T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle)$ ヲ作ル．假定カラ

$$g_0 f^{n-1}=f^n,\quad f^{n-1}: T_k^{n-1}\longrightarrow n_k$$ トスレバ

---

2) 二ツノ単体 T_1^n, T_2^n ガ grad m_1, m_2．何レモ境界ハ Z^{n-1} ニ移ッテ居ル．然ラバ $T_1^n+T_2^n$ ヲ一ツノ T^n ト考ヘレバ grad ハ m_1+m_2

$\varphi(T_{k}^{n-1}\times\langle 0,1\rangle)$ ノ Grad $-n_k$ ナル様ニ容易ニシ得ル。勿論 $\varphi(T_{k}^{n-1}\times 1)\subset Z^{n-1}$

然ラバ $T_{i}^{n}\times 0-\sum_{k}T_{k}^{n-1}\times\langle 0,1\rangle$ ハ一ツノ n 次元 Vollkugel V^n ト考ヘラレ、ソノ境界 $\sum_{k}T_{k}^{n-1}\times 1$ ハ φ デ Z^{n-1} ニ移ッタ。且ツ $\varphi(V^n)$ ノ M^n ヘノ Grad 0. 故ニ $\sum_{k}T_{k}^{n-1}\times 1$ ノ Bild ヲ変ヘズニ V^n ノ Bild ヲ stetig ニ Z^{n-1} ニ deform スルヲ得. ソノ Deformation ノ途中ヲ $\varphi(T_{i}^{n}\times\langle 0,1\rangle)$ ノ Bild ニトレバ Deformation ノ最後ノ位置ガ $\varphi(T_{i}^{n}\times 1)\subset Z^{n-1}$ トナル。

—— 以上 ——

(III) Abbildung ノ Wesentlichkeitsdimension.

$$f:K^m\longrightarrow M^n.$$

f ト等シイ Klasse ノ中ノ Abbildung デソノ Bild ノ dimension ガ $p\ (\leqq n,m)$ ナルモノハ存在スルガ決シテ $p-1$ ニナルモノガ存在シナイトキ f ノ Wesentlichkeitsdimension ハ p デアルトイフ。f ノ Wesentlichkeitsdimension ガ 0 ト云フコトハ f ガ unwesentlich, homotop Null ナルコトデアル。(II) ニ於ケル wesentlich auf ハ Wesentlichkeitsdimension n ナルコトデアル。

M^n ガ S^n ト異ナルベッチ数ヲ持ツナラバ任意ノ変換 $f:S^n\longrightarrow M^n$ ノ Wesentlichkeitsdimension $<n$

デアル。[3]

$S^{n+1} \to M^n$ ノトキハ如何ニナルカ分ラナイ。

<u>定理</u>. K^n ガ M^n へ Wesentlichkeitsdimension n デ連続変換サレルナラバ K^n ノ中ニ u-Zyklus $Z^n \neq 0$ in bezug auf P_1 ガ存在シ Z^n ハ M^n へ wesentlich auf ニ移ル。

<u>証明</u>. $f: K^n \to M^n$ wesentlich auf ダトスル。

今 $B^n_u(K^n, P_1) = 0$ ト假定スル。サテ f ニヨリ K^n ニ 0-Zyklus f^n ガ（(ロ)ノ定義）存在スル・假定ニヨリ $f^n \sim 0$ トナル。然ラバ(II)ノ定理ノ第二段ニヨリ f ハ wesentlich auf デハナクナル。是ハイケナイ。

故ニ $B^n_u(K^n, P_1) \neq 0$. $Z^n \neq 0$ ガ存在スル。

次ニ $f^n \neq 0$ トナッタガ 0-Zyklus ハ $B^n_u(K^n, P_1)$ ノ P_1 へノ一ツノ charakter, $f^n \neq 0$ ナルコトハ或ル u-Zyklus $Z^n \to \alpha \neq 0 \in P_1$ ナル Charakter ナルコトデアル。然ラバソノ <u>Zyklus Z^n ハ f デ M^n ニ wesentlich auf デアル</u>。wesentlich auf デナイナラバ，Z^n ダケヲ考ヘレバ f^n (Teilkomplex Z^n ダケノ) ~ 0 故ニ f^n ナル Charakter デ $Z^n \to 0 \in P_1$. 是 f^n ガ $Z^n \to \alpha \neq 0$ ナル Charakter

---

3) H. Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Crelle. 163.

ニ矛盾。　　　　　　　　　―― 以上 ――

(IV)　$K^m \supset K^n$,　$f: K^n \longrightarrow M^n$.

<u>定理</u>. M^n が S^n ト異ナルベッチ數ヲ持ツナラバ f ニヨル代數複体 f^n (II ニ於ケル定義) ハ 0-Zyklus デアル。(K^{n+1} ニ erweitern 出來ナクテモ)。

<u>証明</u>. $\dot{T}_i^{n+1} = \sum_j T_j^n$ ハ一ツノ S^n

M^n が S^n ト異ナルベッチ數ヲ持ツナラバ $f(S^n)$ ハ必ズ grad 0. 即チ Wesentlichkeitsdimension $< n$.

然ルニ　$g_0 f^n(T_i^{n+1}) = \sum_j f^n(T_j^n) = \sum_j m_j$.

茲ニ m_j ハ T_j^n ニヨル grad.

故ニ　$\sum m_j = 0$

(V)　M^n が $(r+1), \cdots\cdots, m$ simple[4] デアルトスル。然ラバ $(r+2), \cdots\cdots, m$ <u>Hindernis</u> が定義出來ル。

$$K^m \supset K^r \xrightarrow{f} M^n$$

f ハ K^{r+1} ニ erweitern 出來ルトスル。

$F(K^{r+1}) \subset M^n$

---

4) S. Eilenberg: On the relation between the fundamental group on a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. 32.
安倍亮:

各 T_i^{r+2} ニ對シ $F(\dot{T}_i^{r+2}) \subset M^n$. 故ニ M^n ノ $(r+1)$ 次 Homotopiegruppe $\pi^{r+1}(M^n)$ ノ元 α_i ヲ定メル。

$$\text{對應 } f^{r+2} : T_i^{r+2} \longrightarrow \alpha_i$$

ハ一ツノ代數複体デアル。

<u>定理</u>. 代數複体 f^{r+2} ハ 0-Zyklus デアル。

<u>証明</u>. 略. $(r+1)$-Simple ナル故出來ル。

0-Zyklus f^{r+2} ヲ $(r+2)$-Hindernis ト云フ。

<u>定理</u>. $K^r \xrightarrow{f} M^n$ ガ K^{r+1} 迄 erweitern 出來ル. ニツノ Erweiterung F_1, F_2 ニヨリニツノ $(r+2)$ Hindernisse f_1^{r+2}, f_2^{r+2} ガ生ズル. 然ラバ

$$f_1^{r+2} \sim f_2^{r+2}$$

<u>定理</u>. F ガ又 K^{r+2} マデ erweitern 出來ルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ Hindernis $f^{r+2} \equiv 0$ ナルコトデアル。

此処ノ定理ハ Sphäre ノ場合ト同様ニ証明出来ル。即チ Hindernis ニハ "simple" ナル條件ガ必要且ツ十分デアル。從ツテ simple ナ Komplex ニツイテモ言ヘルコトデアル。